

Geometria in diretta dal laboratorio matematico

Gianfranco Arrigo

Introduzione

Molto spesso, quando mi si chiede quale professione esercito e rispondo "professore di matematica" colgo nel mio interlocutore un cenno di repulsione. Non di rado mi sento ribattere "non è mai stata la mia specialità" o peggio.

Mi rendo conto che cattive esperienze scolastiche, il solo contatto con una matematica morta (per lo più raccontata alla lavagna da un insegnante che non si interessa di ciò che realmente i suoi giovani allievi capiscono) e, non da ultimo, la non conoscenza dell'importanza del contributo che la pratica della matematica dà alla formazione intellettuale del giovane, possano generare disinteresse e repulsione nei confronti di questa materia.

Eppure la matematica è bella. Lo è perché è viva. È viva se la si pratica, non se si è costretti ad assistere a una sua presentazione fatta da un adulto, che si esprime in un linguaggio adulto, giustificato da pretese esigenze di rigore.

La matematica morta è fatta di paginate di calcoli numerici o letterali, di teoremi completi di ipotesi/tesi/dimostrazione, di teorie fatte di definizioni/lemmi/teoremi.

La matematica viva è alimentata dalla curiosità, dal bisogno di conoscere, dalla necessità di capire il mondo che ci circonda ed è fatta di problemi, di situazioni problematiche, di interrogativi.

La matematica morta viene subita dall'allievo, il quale anche se riesce a capirne i dettagli tecnici non capisce la necessità di affrontare i vari argomenti, non riesce a dare senso a ciò che sta imparando. In questo senso è significativa la domanda che gli allievi pongono "a che cosa serve tutto ciò?", domanda alla quale qualche insegnante pensa, illudendosi, di poter rispondere con un classico "abbiate pazienza, lo vedremo dopo".

Vivere la matematica significa educare la mente a pensare in modo razionale, a porsi domande e a cercare di rispondere senza conoscere la soluzione fornita dalla matematica ufficiale; significa sviluppare le capacità di analizzare, di sintetizzare/schematizzare, di tentare soluzioni, di formulare ipotesi, di verificare, di intuire, di creare le proprie immagini mentali dei vari concetti. Infine significa giungere alla concettualizzazione, alla teorizzazione, alle regole e ai teoremi, che però sono situati alla fine di un percorso e perciò immersi in un contesto che dà loro senso e sostanza.

Vivere la matematica è anche praticarla con piacere, con desiderio di conoscere sempre di più, di acquisire nuove competenze; è sviluppare armoniosamente le capacità potenziali dei giovani; è provare piacere per la ricerca; è preparare i giovani ad affrontare la complessa realtà del mondo di oggi.

Quadro teorico

Un aspetto fondamentale dell'attività matematica nella scuola obbligatoria è senza dubbio quello formativo: cioè, in sintesi, lo sviluppo e il raffinamento delle capacità ragionate. La domanda sociale si orienta sempre di più su giovani capaci di agire, piuttosto che su menti intasate di nozioni. Le caratteristiche più richieste nella formazione dei giovani alunni da sono

da ricercarsi nella qualità dello sviluppo delle facoltà di ragionamento (analisi¹, sintesi², riflessione metacognitiva³, intuizione⁴, invenzione⁵).

D'altra parte, oggi, la linea di pensiero costruttivista (in particolare il concetto pedagogico di socio-costruttivismo), sta influenzando l'insegnamento -non solo della matematica- di mezzo mondo. Questa concezione si basa sugli studi dei cognitivisti: dal movimento della Gestalt, a Piaget, a Vygotski, tanto per citare qualche nome universalmente riconosciuto. L'assunto di base che caratterizza il costruttivismo all'interno della corrente cognitivista è che l'allievo, messo in condizioni adeguate, riesce a costruire, in modo attivo, una sua propria conoscenza interagendo con l'ambiente (primo assioma) e organizzando poi le sue costruzioni mentali (secondo assioma). Per la didattica della matematica cito due nomi per tutti: Vergnaud e Kilpatrick.

Secondo l'interpretazione di Piaget, la conoscenza umana è profondamente ancorata nella struttura biologica del soggetto e costituisce un prolungamento del processo di adattamento, caratteristico degli esseri viventi. Ma questo processo non può realizzarsi se non attraverso un filtraggio, una reinterpretazione e un'assimilazione degli apporti esterni. L'assimilazione è un processo attivo: il soggetto costruisce le proprie conoscenze mediante continue interazioni con l'ambiente e non può conoscere altro se non ciò sul quale egli agisce.

Il socio-costruttivismo nasce dai contributi di Henri Wallon, secondo il quale nel processo di costruzione del concetto è essenziale l'interazione fra soggetti in apprendimento. L'ambiente viene quindi esteso a quello sociale, alla classe, ai piccoli gruppi di lavoro.

Importante risulta pure il contributo di Vygotski, il quale intravede, nel soggetto in apprendimento, una zona di sviluppo potenziale che si colloca tra il livello di risoluzione autonoma di problemi e quello di risoluzione mediante l'aiuto dell'adulto. È appunto in questa zona che l'apprendimento trova condizioni ottimali per realizzarsi.

In sostanza il costruttivismo riafferma in modo inequivocabile che l'apprendimento è un fenomeno endogeno, staccandosi decisamente dalla concezione comportamentista, secondo la quale -come si sa- l'apprendimento è considerato un continuo adattamento all'ambiente -scevro da qualsiasi rielaborazione interna-, un fenomeno riproduttivo, un processo esogeno⁶.

¹ L'allievo compie un'analisi, per esempio, quando si trova davanti al testo di un nuovo problema che deve risolvere, oppure quando è davanti a una figura geometrica che deve interpretare, oppure ancora quando è davanti a un'espressione letterale che deve semplificare.

² Procedimenti di sintesi che gli allievi fanno a scuola sono sicuramente l'impostazione di un iter risolutivo, la traduzione in termini matematici di un testo scritto in lingua o di una data situazione, la determinazione delle proprietà caratteristiche che definiscono un oggetto matematico.

³ Anche se a prima vista sembrerebbe esagerato pretendere una tale prestazione da allievi della scuola dell'obbligo, in realtà gli alunni ogni tanto riflettono sui procedimenti adottati, quasi sempre con l'intento di ricordare quelli vincenti e cancellare dalla mente quelli che secondo loro non sono utili. L'insegnante accorto può sfruttare queste riflessioni spontanee dei suoi allievi per imbastire discorsi più importanti sui modi di pensare tipici della matematica.

⁴ L'intuizione è una capacità divergente. Come tale non può essere acquisita con lo studio ma può essere sviluppata e raffinata con la pratica. Occorre quindi che l'insegnante metta spesso i propri allievi in condizioni da dover intuire qualcosa (un nuovo modo di fare, un nuovo concetto, la chiave di un problema, il passaggio delicato di un procedimento, ecc.).

⁵ Inventare in matematica è roba da... matematici famosi, ma a scuola gli alunni possono inventare piccole cose: nuovi modi per rappresentare un oggetto matematico, nuove figure geometriche, nuovi problemi, ecc. Sta all'insegnante incentivare, incoraggiare e dare giusto riconoscimento a questa attività.

⁶ Si pensi ad un insegnamento basato sull'esposizione alla lavagna, le cui richieste per gli allievi si limitano a chiedere la riproduzione di quanto è stato esposto.

Nella didattica della matematica lo stile costruttivista si adatta perfettamente sia all'insegnamento di un nuovo concetto sia alla pratica del *problem solving* (anche se le due attività non sono sempre scindibili).

Adottare lo stile costruttivista significa mettere l'allievo in posizione attiva nei confronti del processo di apprendimento. Se è vero che lo studente può apprendere determinate informazioni o nozioni anche solo ascoltando passivamente l'esposizione dell'insegnante, è altrettanto chiaro che per sviluppare le sue capacità ragionate e le doti d'intuizione e per raggiungere le competenze disciplinari attese occorre che lo stesso sia messo in situazione tale da poter operare autonomamente, all'interno di un ambiente (situazione) nel quale possa interagire con altri soggetti in apprendimento.

Per quanto riguarda l'insegnamento della geometria, nell'ottica costruttivista non ha alcun senso, per esempio, far studiare dimostrazioni di teoremi spiegate alla lavagna. Questo per molte ragioni. Prima di tutto perché, così facendo, non si stimola alcun processo di assimilazione, di rielaborazione, di appropriazione endogena. Poi perché il soggetto non viene messo in situazione tale da poter capire la problematica che sta a monte del teorema in questione: in queste condizioni allo studente non rimane altro che adattarsi all'ambiente esterno, al teorema proposto dall'insegnante, alla dimostrazione spiegata dall'insegnante; quindi la memorizza per essere pronto a riprodurla quando gli viene richiesta. Per contro, dal punto di vista costruttivista, l'allievo viene messo in una situazione che gli permette di giungere ad esprimere il teorema come congettura derivante da un'esperienza concretamente vissuta. La problematica del teorema è fatta propria dall'allievo; il teorema è una sua conoscenza, prima di giungere alla dimostrazione. Quest'ultima può nascere semplicemente dalla curiosità di capire se l'enunciato vale sempre e perché, oppure da quella ancor più interessante di dover convincere un compagno della bontà della propria congettura. Nasce così nel gruppo un processo di dimostrazione-confutazione alla Lakatos⁷.

Il laboratorio di geometria

Il laboratorio di geometria, così come viene concepito nella scuola media ticinese⁸, è un momento ritagliato all'interno delle lezioni di matematica, completamente dedicato ad attività atte a sviluppare le competenze geometriche. Col termine competenza intendo il complesso di saperi, saper fare e saper essere che concernono un determinato contenuto. Nel laboratorio si deve poter agire in un clima ideale per dare libero sfogo alla fantasia, all'intuizione, all'induzione e alla deduzione degli allievi. L'alunno deve poter lavorare con interesse e trovare piacere tutte le volte che si rende conto di aver compiuto un passo in avanti verso la soluzione del problema.

Le conoscenze geometriche non vengono presentate in modo strutturato e organizzato secondo una logica disciplinare, ma vengono incontrate, elaborate e assimilate dall'alunno a mano a mano che compaiono nella risoluzione di problemi sorti all'interno di situazioni aperte. Il processo di strutturazione e di istituzionalizzazione può essere fatto in un secondo momento, con la guida dell'insegnante, ma deve essere ancorato su un solido terreno di esperienza.

⁷ Vedere Imre Lakatos, *Dimostrazioni e confutazioni*, Feltrinelli, Milano, 1979

⁸ In Ticino la scuola media inizia per tutti gli allievi subito dopo la quinta elementare e dura quattro anni; il primo biennio tutti insieme, mentre nel secondo biennio per matematica, francese e tedesco vi sono corsi base e corsi attitudinali. Il laboratorio di matematica viene però offerto in entrambi i corsi. Vedere in particolare gli articoli di C. Beretta "Esistenza di poligoni circoscrivibili ad una circonferenza: spunto per un laboratorio di prima liceo", *Bollettino dei docenti di matematica (BDM)* 35; "Geometria in situazione. Proposte per il laboratorio matematico del liceo", *BDM* 37.

Non credo che si possano dare delle definizioni, se non generiche, delle attività che caratterizzano il laboratorio.

Sicuramente, come già detto, devono essere lavori che permettono all'allievo di agire da protagonista - da solo o in un piccolo gruppo - e inoltre tali da stimolare la produzione di prestazioni cognitive superiori⁹. Ma devono essere nel contempo lavori stimolanti: l'allievo deve provare un grande interesse per l'attività che gli viene proposta. L'interesse dev'essere già presente sin dall'inizio, perché così agisce da stimolo per compiere i primi, difficili passi. L'attività di laboratorio dev'essere "viva", cioè molto vicina all'esperienza dei ragazzi. Per l'insegnante, questo è forse il punto più difficile da considerare. Si sa che venti allievi di una classe sono venti persone diverse, ciascuna con un proprio vissuto sociale e scolastico, ciascuna con i propri interessi, con le proprie simpatie e antipatie. È quindi difficile trovare argomenti adatti per tutti; ma gli interessi, anche se non si possono assolutamente imporre, spesso è possibile farli nascere.

Nel caso della geometria, si possono costruire interessanti attività sul calcolo di perimetri, aree, volumi, come pure sullo studio delle principali proprietà strutturali delle figure che intervengono nella risoluzione di problemi¹⁰.

⁹ Ci si riferisce alla "Tavola tassonomica per la matematica" di G. Arrigo e F. Frabboni. Gli apprendimenti superiori si suddividono in: analisi, sintesi, riflessione metacognitiva (convergenti) e intuizione, invenzione (divergenti).

¹⁰ Un'interessante rassegna di proposte didattiche di geometria si può trovare ad esempio sui testi:
Arrigo G., Sbaragli S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria*. Roma: Carocci.
Cottino L., Sbaragli S. (2005). *Le diverse "facce" del cubo*. Roma: Carocci.